

習題解答—limit-01-03

以下討論的極限都是利用

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (why ?)}$$

這個已知結果來解決。

習題 1. 計算下列個題

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec(13x) - \tan(13x)}{x - \pi/2}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x) - \sin(5x)}{\sin^3 2x}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \sqrt{4x^2 + 7}$$

解:我們要想辦法將用上現有工具 (1) 來解決問題。

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec(13x) - \tan(13x)}{x - \pi/2} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{1 - \sin(13x)}{(x - \pi/2) \cos(13x)} \stackrel{t=x-\pi/2}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sin(13(t + \pi/2))}{t \cos(13(t + \pi/2))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sin(13t + \pi/2)}{t \cos(13t + \pi/2)} \quad (\text{因為 } \sin x, \cos x \text{ 週期為 } 2\pi) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(13t)}{-t \sin(13t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin^2(13t/2)}{-2t \sin(13t/2) \cos(13t/2)} = -13/2 \end{aligned}$$

2. 第二題同第一題作法。

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \sqrt{4x^2 + 7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) (2x) \left(\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} \left(\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \right) \\ &\stackrel{t=1/x}{=} 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \left(\sqrt{1 + 7t^2} \right) = 2 \end{aligned}$$